Exercice 8

a) Résoudre l'équation retardée suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = x(t-1) + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

b) Résoudre l'équation retardée suivante:

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t-1) + 1 \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

c) Résoudre l'équation retardée suivante:

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t-1) + x(t-2) - 1 = 0 \\ x(0) = x'(0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 9

Soient $p \mapsto a(p)$ et $p \mapsto b(p)$ deux fonctions telles que

$$a(p)\, e^{-sb(p)} = \text{Laplace}(g(t,s))(p)$$

et une fonction f de transformée de Laplace F.

1) Montrer que $\mathbf{1}\left(\int_0^\infty f(s)\, g(t,s)\, ds\right) = \mathrm{F}(b(p))\; a(p)$

2) Montrer que si $a(p) = \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $b(p) = \sqrt{p}$, $g(t,s) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\, exp\,(-\frac{s^2}{4t})$.

En déduire l'original de $\frac{\mathrm{F}(\sqrt{p})}{\sqrt{p}}$

3) Montrer que si $a(p) = \frac{1}{p}$ et $b(p) = \frac{1}{p}$, $g(t,s) = \mathrm{I}_0(2\sqrt{t})$. En déduire l'original de $\frac{\mathrm{F}(\frac{1}{p})}{p}$.

En déduire la formule $\int_0^\infty \mathrm{I}_0(2\sqrt{s\,t})\, cos\, s\; ds = sin\, t$

I_0 est la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre 0 (solution de $x^2y'' + xy' - (x^2 + 0^2)y = 0$).